Lois de probabilité à densité
Loi normale

Table des matières

1 Lois à densité

1.1 Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température, peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné. On dit alors que cette variable X est continue (qui s'oppose à discrète comme c'est le cas par exemple dans la loi binomiale).
On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur isolée de X est alors nulle.
On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité.

1.2 Densité de probabilité et espérance mathématique

Définition 1 : On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X, toute fonction f continue et positive sur un intervalle I ($[a;b]$, $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$) telle que :

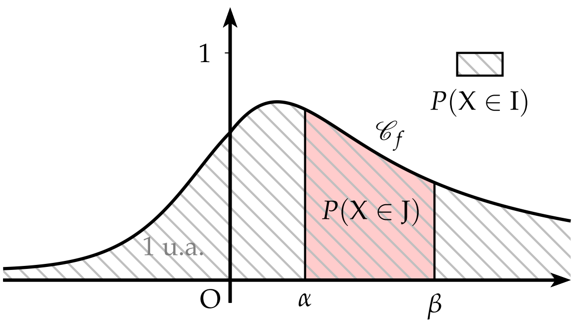
- $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \displaystyle\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a : $P(X \in \mathrm{J}) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t$

D'autre part la fonction F définie par : $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée la **fonction de répartition** de la variable X

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \lim_{a\to-\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

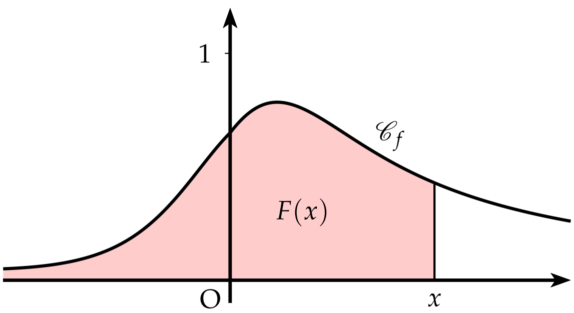
Remarque :

- Comme la fonction f est continue et positive, la probabilité $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I})$ correspond à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$. Elle vaut alors 1 u.a.
- La probabilité $P(\mathrm{X} \in \mathrm{J})$, avec $\mathrm{J} = [\alpha; \beta]$, correspond à l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = \alpha$ et $y = \beta$.



- Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle, **que l'intervalle J soit ouvert ou fermé importe peu**. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} \in [\alpha,\beta]) &= P(\mathrm{X} \in [\alpha,\beta[) \\ &= P(\mathrm{X} \in]\alpha,\beta]) \\ &= P(\mathrm{X} \in]\alpha,\beta[) \end{aligned}$$



- L'écriture $(X \in I)$ est une notation abusive car X n'est pas un nombre, mais la fonction qui associe une issue à un nombre. Elle prolonge la notation déjà utilisée pour des variables discrètes $(X = a)$

Définition 2 : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur I, est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

1.3 Loi uniforme : densité homogène

1.3.1 Définition

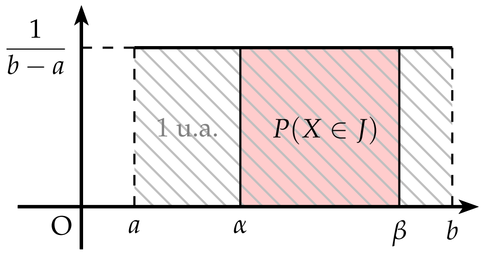
Définition 3 : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme dans l'intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$, avec $a \neq b$, lorsque la densité f est constante sur cet intervalle. On en déduit alors la fonction f :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Conséquence Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a alors :

$$P(X \in \mathrm{J}) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$

La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.



Exemple : On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle [0 ;5]. On associe à X le nombre choisi. Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 4 ? compris entre e et π ?

$$P(\mathrm{X} > 4) = \frac{1}{5} \qquad P(e \leqslant X \leqslant \pi) = \frac{\pi - e}{5} \simeq 0,085$$

1.3.2 Espérance mathématique

Théorème 1 : Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$, avec $a \neq b$, alors son espérance mathématique vaut :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration : D'après la définition de l'espérance, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

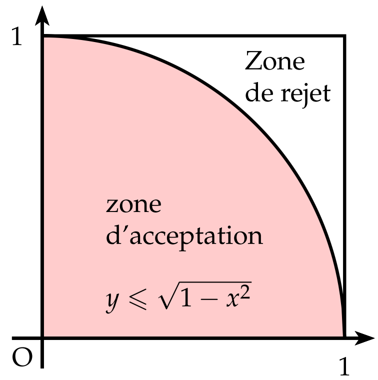
Remarque : Dans notre exemple précédent, on trouve : $E(X) = 2,5$ ce qui n'a rien de surprenant !

1.3.3 Application : méthode de Monte-Carlo

Méthode de Monté-Carlo : méthode probabiliste très utilisée pour la résolution approchée de problèmes variés allant de la théorie des nombres à la physique mathématique en passant par la production industrielle.

Application : Calcul d'une valeur approchée du nombre π

- **Par la méthode du rejet :** On admet, lors du tirage au hasard d'un point dans un carré de côté 1, que la probabilité de tirer un point dans un domaine situé dans ce carré unité est proportionnelle à l'aire de ce domaine. Comme il s'agit du carré unité, cette probabilité est donc égale à l'aire du domaine.



On tire un grand nombre de points (par exemple 10 000). D'après la loi des grands nombres, la probabilité p d'avoir un point dans la zone d'acceptation vaut :

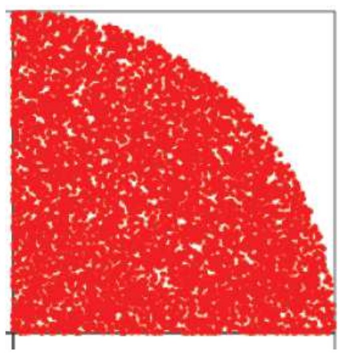
$$p = \frac{\text{nombre de points dans la zone d'acceptation}}{\text{nombre total de points}}$$

p correspond à l'aire du quart du cercle unité soit $\dfrac{\pi}{4}$

On peut alors écrire l'algorithme suivant :

Variables : N, D, I : entiers
X, Y : réels dans $[0\,;1]$
Entrées et initialisation
Effacer l'écran
Lire N
$0 \to D$
Traitement
pour I de 1 à N **faire**
random(0,1) $\to X$
random(0,1) $\to Y$
si $Y \leqslant \sqrt{1-X^2}$ **alors**
$D+1 \to D$
Tracer le point (X, Y)
fin
fin
Sorties : Afficher D, $4 \times \dfrac{D}{N}$

On obtient le graphe suivant pour $N = 10\,000$:



On trouve les résultats suivants :

$$D = 7\,893 \quad \pi \simeq 3{,}157\,2$$

La précision est de l'ordre de $\dfrac{1}{\sqrt{N}} \simeq 0,01$

- Par la **méthode de l'espérance** :

On choisit au hasard N valeurs de l'abscisse X d'un point M dans [0 ;1].

On calcule la somme S des N valeurs prises par $f(X) = \sqrt{1-X^2}$.

La moyenne des N valeurs de $f(X)$ est une valeur approchée de la valeur moyenne μ de f donc de l'aire du quart de cercle.
On trouve alors pour $N = 10\,000$: $\pi \simeq 3{,}151\,5$

```
Variables : N, I : entiers
            X, S, p réels
Entrées et initialisation
  | Lire N
  | 0 → S
Traitement
  | pour I de 1 à N faire
  |   | random(0,1) → X
  |   | S + √(1 − X²) → S
  | fin
  | S/N → p
Sorties : Afficher 4p
```

Pour $a = 0,\ b = 1$ et $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \simeq \frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N}$$

1.4 Loi exponentielle : loi sans mémoire

1.4.1 Définition

Définition 4 : Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$ lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Conséquence On peut vérifier que :

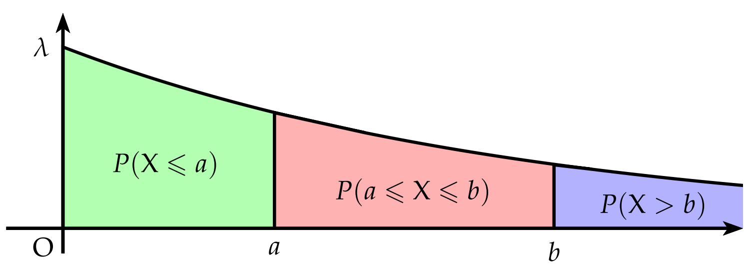
- la fonction de répartition F vaut : $F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ car

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

- f est bien une densité de probabilité, car la fonction f est continue, positive et :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$$

- $P(X \leqslant a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- Par l'événement contraire, on a : $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$
- Si X se trouve dans $[a, b]$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$



1.4.2 Loi sans mémoire ou sans vieillissement

Théorème 2 : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** c'est à dire que :

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

ROC **Démonstration :** On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P(X \geqslant t \text{ et } X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h) \end{aligned}$$

Remarque : On dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire ou sans vieillissement lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t, **ne dépend pas de** t.

On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans vieillissement

Ceci est valable si l'appareil n'est pas sujet à un phénomène d'usure. On retrouve cette propriété en ce qui concerne la durée de vie d'un noyau radioactif.

1.4.3 Espérance mathématique

Théorème 3 : Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors son espérance mathématique vaut :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ROC **Démonstration :** D'après la définition, en posant $g(t) = tf(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$, on a :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\, dt$$

Il faut trouver une primitive de la fonction g, pour cela on dérive la fonction g

$$g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g(t) \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)$$

On a alors : $\displaystyle\int_0^x g(t)\, dt = \int_0^x \left(e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t) \right) dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g(t) \right]_0^x$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(-e^{-\lambda x} - g(x) + 1 + g(0) \right) = \frac{1}{\lambda} \left(-e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} + 1 \right)$$

On pose : $Y = -\lambda x$, d'où si $x \to +\infty$ alors $Y \to -\infty$

On a alors : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim_{Y \to -\infty} e^Y = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{Y \to -\infty} -Y e^Y = 0$

Par somme et produit, on a alors : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\, dt = \frac{1}{\lambda}$

1.4.4 Un exemple

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1) Calculer la valeur λ arrondie à trois décimales.
2) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :

   a) moins de 8 ans

   b) plus de 10 ans

   c) au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans
3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant.

1) Si T vérifie une loi sans vieillissement, T suit donc une loi exponentielle. Si la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675, on a donc :

$$P(T \leqslant 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5 = -e^{-5\lambda} + 1$$

On a alors : $-e^{-5\lambda} + 1 = 0,675 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-5\lambda} = 0,325 \quad \Leftrightarrow \quad -5\lambda = \ln 0,325$

On trouve alors : $\lambda = -\dfrac{\ln 0,325}{5} \simeq 0,225$

2) On a :

   a) $P(T < 8) = P(T \leqslant 8) = 1 - e^{-0,225\times 8} \simeq 0,835$

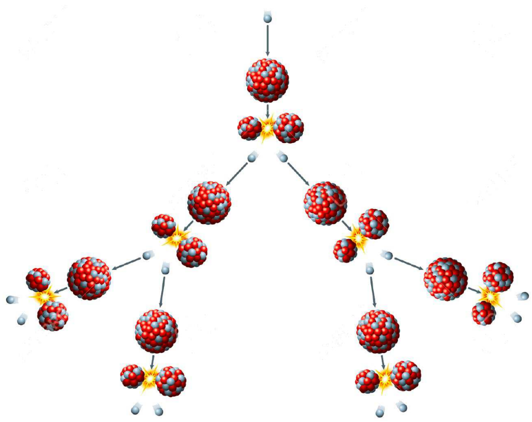
   b) $P(T > 10) = P(T \geqslant 10) = e^{-0,225\times 10} \simeq 0,105$

   c) $P_{T\geqslant 3}(T \geqslant 8) = P(T \geqslant 5) = e^{-0.225\times 5} \simeq 0,325$

3) $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,225} \simeq 4,44$ soit à peu près 4 ans et demi

1.4.5 Application à la physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « *microscopique* », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ. λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t, on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors :

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Définition 5 : Pour une variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, on appelle **demi-vie** la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X \geqslant t_{1/2}) = \frac{1}{2}$.
On obtient alors :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

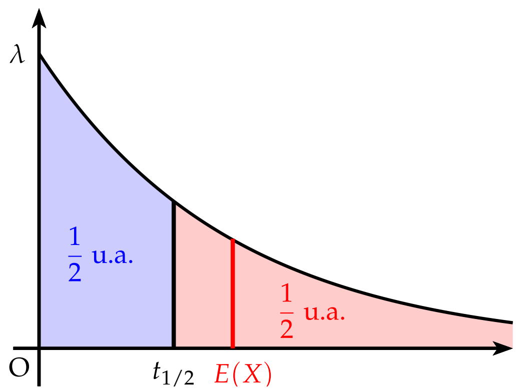
Enfin la durée de vie moyenne τ d'un radionucéide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$

Définition 6 : Pour une variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, la durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique.

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$

Remarque : La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = \mathrm{E}(X)$ car la courbe de densité de probabilité $\mathscr{C}_f$ n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse E(X).



1.5 Lien entre le discret et le continu

Discret	Continu
Univers Ω	Intervalle I ou $\mathbb{R}$
Événement E sous-ensemble de Ω	Événement J sous-intervalle de I
Probabilités p_i des événements élémentaires $\sum p_i = 1$	Densité de probabilité $\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
Espérance de la variable aléatoire X $E(\mathrm{X}) = \sum p_i x_i$	Espérance de la variable aléatoire X $E(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$
Équiprobabilité $P(E) = \dfrac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$	Loi uniforme $P(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \dfrac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$

2 La loi normale

2.1 Du discret au continu

Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences ($n > 50$ par exemple) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite ($p > 0,1$), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une courbe en cloche ou courbe de Gauss. On passe ainsi d'une distribution discrète à une distribution continue beaucoup plus souple.

Cette loi normale intervient dans de nombreuses distributions statistiques, lorsqu'un critère d'un individu - par exemple la taille d'une femme adulte - dépend d'un grand nombre de facteurs ou paramètres. La répartition de la taille d'une femme adulte dans une population suit alors une loi normale (Théorème central limit)

2.2 La loi normale centrée réduite

2.2.1 La densité de probabilité de Laplace-Gauss

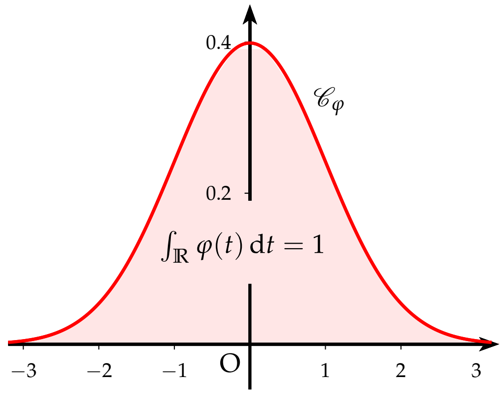
Définition 7 : On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Remarque : Cette fonction φ correspond bien à une densité de probabilité :

- φ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$).

- Cette fonction est paire et admet en 0 un maximum : $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,4$
- Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. Sa démonstration est admise. Il faut cependant savoir qu'il n'existe pas de primitive s'exprimant avec des fonctions élémentaires pour cette fonction et que le calcul de l'aire sous la courbe demande des méthodes plus ou moins détournées tel un changement de variable.
- La courbe $\mathscr{C}_\varphi$ est appelée **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**.



Comme la fonction φ est paire, on a alors :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

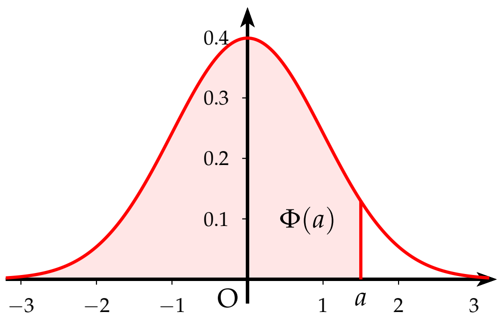
2.2.2 Loi normale centrée réduite

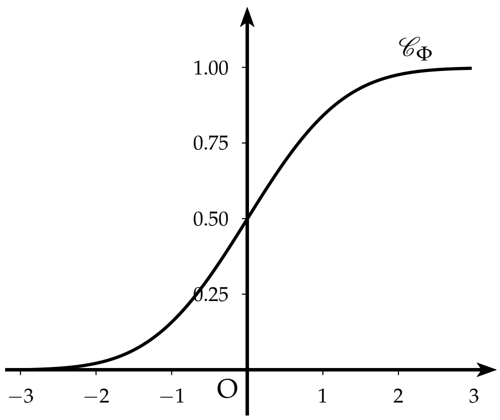
Définition 8 : On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathscr{N}(0,1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ.
Sa fonction de répartition Φ est donc définie par :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque :

- Le nombre $\Phi(a)$ représente l'aire du domaine délimité par cette courbe en cloche l'axe des abscisses et la droite $x = a$.
- La fonction Φ peut être considérée comme la primitive de la fonction φ qui vérifie $\Phi(0) = 0,5$.
- Avant l'arrivée des calculatrices, on avait des tables donnant les valeurs de $\Phi(a)$ pour les valeurs de a positives.
  Avec la calculatrice TI, pour calculer $\Phi(1,24)$ on tape "**distrib**" puis on sélectionne "**normalFRép**$(-1\,\mathrm{E}\,99, 1.24)$". On trouve alors 0,892 5 (voir notice page 290)





2.2.3 Calcul de probabilités

Théorème 4 : Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$
$$P(X \geqslant a) = 1 - \Phi(a)$$
$$P(X \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$$

Démonstration : La première égalité est liée à la relation de Chasles pour l'intégrale (soustraction des aires sous la courbe)

La deuxième égalité est liée à l'événement contraire : $P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a)$

Enfin la troisième égalité est liée à la parité de la fonction φ. L'aire sous la courbe de la partie gauche est égale à l'aire sous la courbe de la partie droite.

Exemples : Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. A l'aide d'une table des valeurs de Φ, déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X \geqslant 1,35)$
b) $P(X \leqslant -0,56)$
c) $P(-0,56 \leqslant X \leqslant 1,35)$
d) $P(X \leqslant -0,56 \text{ ou } X \geqslant 1,35)$

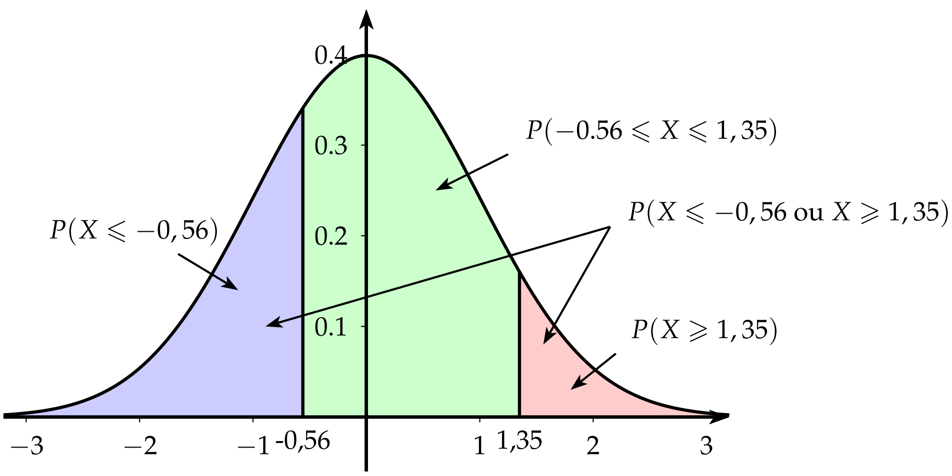
On repère sur la table les valeurs : $\Phi(0,56) \simeq 0{,}712\,3$ et $\Phi(1,35) \simeq 0{,}911\,5$

a) $P(X \geqslant 1,35) = 1 - P(X \leqslant 1,35) = 1 - \Phi(1,35) = 1 - 0{,}911\,5 = 0{,}088\,5$

b) $P(X \leqslant -0,56) = \Phi(-0,56) = 1 - \Phi(0,56) = 1 - 0{,}712\,3 = 0{,}287\,7$

c) $P(-0,56 \leqslant X \leqslant 1,35) = \Phi(1,35) - \Phi(-0,56) = 0{,}911\,5 - 0{,}287\,7 = 0{,}623\,8$

d) $P(X \leqslant -0,56 \text{ ou } X \geqslant 1,35) = P(X \leqslant -0,56) + P(X \geqslant 1,35)$
$P(X \leqslant -0,56 \text{ ou } X \geqslant 1,35) = 0{,}287\,7 + 0{,}088\,5 = 0{,}376\,2$



Remarque : Certaines valeurs interviennent souvent, il est bon de les mémoriser.

$$\boxed{\begin{array}{l} P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 0,683 \\ P(-2 \leqslant X \leqslant 2) = 0,954 \\ P(-3 \leqslant X \leqslant 3) = 0,997 \end{array}}$$

2.2.4 Espérance et variance

> **Théorème 5 :** Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors son espérance est nulle et sa variance est égale à 1

Remarque : C'est pour cette raison que cette loi normale est centrée $(\mathrm{E}(X) = 0)$ et réduite $(\mathrm{V}(X) = 1)$

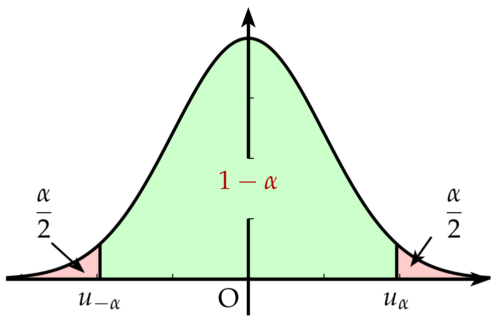
2.2.5 Probabilité d'intervalle centré en 0

> **Théorème 6 :** X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :
> $$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

ROC

Démonstration : On cherche un réel x strictement positif tel que :

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= 1 - \alpha \\ \Phi(x) - \Phi(-x) &= 1 - \alpha \\ \Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1 - \alpha \\ 2\Phi(x) - 1 &= 1 - \alpha \\ \Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$$

et $\quad 0 < \alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Remarque : Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$, On obtient ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0,95 \\ P(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) = 0,99 \end{array}}$$

Exemple : X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
Déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = 0,8$.
On donnera les bornes de l'intervalle avec une précision de 10^{-2}.

$\Rightarrow \Rightarrow$

On a donc : $1 - \alpha = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0,2$

On doit donc avoir : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad u_\alpha = \Phi^{-1}(0,9)$.

A l'aide de la calculatrice avec la fonction "**FracNorm(0.9)**" ou à l'aide d'une table, on trouve :

$$u_\alpha \simeq 1,28 \quad \text{donc} \quad \mathrm{I} = [-1,28; 1,28]$$

2.3 Loi normale générale

2.3.1 Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ

Définition 9 : Si une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et réciproquement.

Propriété 1 : Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors son espérance vaut μ et sa variance vaut σ^2.

Démonstration : De la linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$E(Z) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0 \quad \text{comme} \quad E(Z) = 0 \quad \text{alors} \quad E(X) = \mu$$

De plus, comme $V(aX) = a^2 V(X)$, on a :

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) \quad \text{comme} \quad V(Z) = 1 \quad \text{alors} \quad V(X) = \sigma^2$$

Exemple : Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6 °C.
Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

a) températures inférieures à 16 °C

b) températures comprises entre 20°C et 24,5°C

c) températures supérieures à 21°C.

$\Rightarrow \Rightarrow$

On appelle T la variable aléatoire associée aux températures et Z la variable aléatoire associée à la loi normale centrée réduite.
Il y a deux façons d'obtenir les résultats, soit on utilise une table et alors on doit revenir à la loi normale centrée réduite, soit on utilise la calculette et alors on peut utiliser la loi normale de l'énoncé.

a) On veut calculer : $P(T \leqslant 16)$

Avec la calculatrice, on tape :
"**normalFRép**$(-1\,\mathbf{E}\,99, 16, 18.2, 3.6)$", on trouve alors : 0,271

Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

$$T \leqslant 16 \quad \Leftrightarrow \quad Z \leqslant \frac{16 - 18,2}{3,6} \quad \Leftrightarrow \quad Z \leqslant -0,611$$

On a alors : $\Phi(-0,611) = 1 - \Phi(0,611) = 1 - 0,729 = 0,271$

b) On veut calculer : $P(20 \leqslant T \leqslant 24,5)$

Avec la calculatrice, on tape :
"**normalFRép**$(20, 24.5, 18.2, 3.6)$", on trouve alors : 0,268

Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

$$20 \leqslant T \leqslant 24,5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20 - 18,2}{3,6} \leqslant Z \leqslant \frac{24,5 - 18,2}{3,6} \quad \Leftrightarrow \quad 0,5 \leqslant Z \leqslant 1,75$$

On a alors : $\Phi(1,75) - \Phi(0,5) = 0,960 - 0,692 = 0,268$

c) On veut calculer : $P(T \geqslant 21)$

Avec la calculatrice, on tape :
"**normalFRép**$(21, 1\,\mathbf{E}\,99, 18.2, 3.6)$", on trouve alors : 0,218

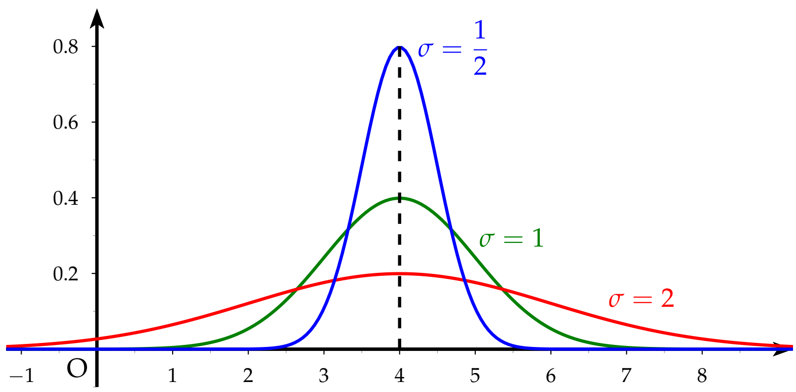
Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

$$T \geqslant 21 \quad \Leftrightarrow \quad Z \geqslant \frac{21 - 18,2}{3,6} \quad \Leftrightarrow \quad Z \geqslant 0,78$$

On a alors : $1 - \Phi(0,78) = 1 - 0,782 = 0,218$

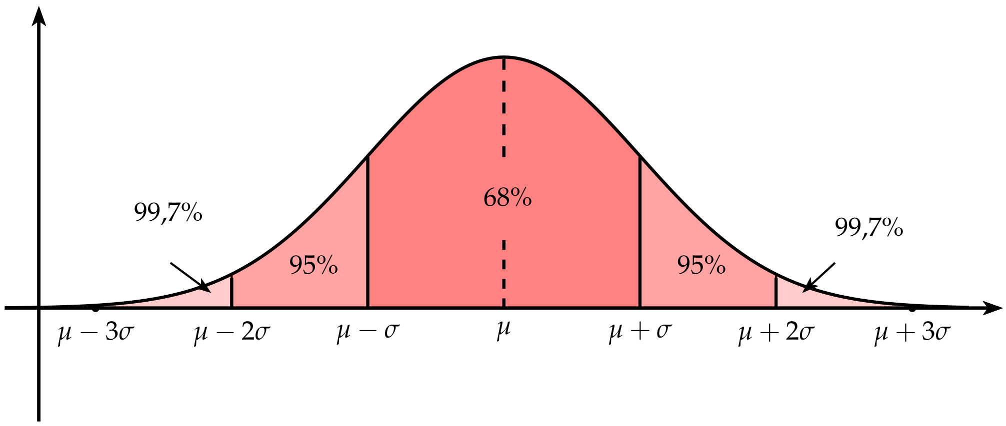
2.3.2 Influence de l'écart type

Voici ci-dessous les courbes des densités correspondantes à une espérance de 4 et aux écarts types respectifs de : $\frac{1}{2}$, 1 et 2.



On constate que plus l'écart type est important, plus la courbe de densité est évasée et plus le maximum est petit. En effet un écart type important signifie que la dispersion des données est importante.

Ces différentes courbes peuvent être repérées par 3 intervalles caractéristiques : $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ et $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$



On a alors :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0,997$

2.3.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 7 : Théorème de Moivre-Laplace

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et Z la variable aléatoire telle que : $Z = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)} = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

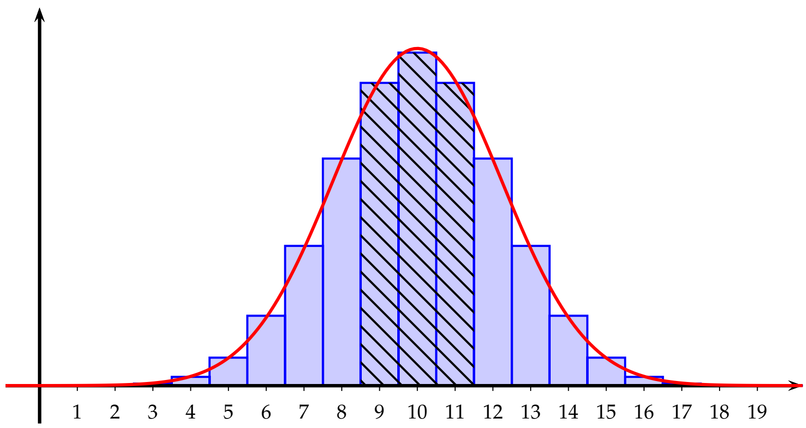
$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Pour les grandes valeurs de n la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ est proche de la loi normale $\mathscr{N}(np, np(1-p))$

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale lorsque l'on aura les conditions suivantes :

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

Dans l'exemple ci-dessous, on a tracé $\mathscr{B}(20;0,5)$ et la densité de la loi normale correspondante ($\mu = 20 \times 0,5 = 10$ et $\sigma = \sqrt{20 \times 0,5^2} = \sqrt{5}$). Les deux dernières conditions sont respectées ($np = 10$ et $n(1-p) = 10$)



Calculons $P(9 \leqslant X \leqslant 11)$ avec la loi binomiale $\mathscr{B}(20; 0,5)$ puis avec la loi normale $\mathscr{N}(10, 5)$.

- Avec la loi binomiale. Sur la calculette **"binomFdP(20 ;0.5,{9,10,11})"**

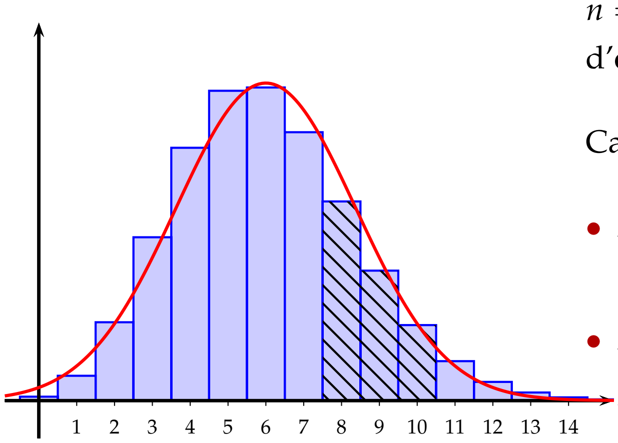
$$P(9 \leqslant X \leqslant 11) \simeq 0,4966$$

- Avec la loi normale. Comme on remplace un diagramme en bâton par un histogramme, il faut intégrer trois rectangles centrés en 9, 10 et 11. donc il faut calculer $8,5 \leqslant X \leqslant 11,5$. C'est ce qu'on appelle la **correction de continuité**. Avec la calculette : **"NormalFRép(8.5,11.5,10,$\sqrt{5}$)"**

$$P(8,5 \leqslant X \leqslant 11,5) \simeq 0,4977$$

  L'erreur est donc de 0,1%

Il se peut par contre que n soit grand et cependant p trop petit pour qu'on soit dans les conditions de l'approximation normale. Cela se produit par exemple lorsque l'on considère le nombre d'accidents provoqués par un vaccin, le nombre de suicides dans une grande ville, pour une période donnée.
Dans le cas des petites valeurs de p c'est à dire pour $p < 0,1$, l'approximation de la loi binomiale ne pourra pas se faire avec une loi normale
Dans l'exemple ci-dessous, on a :



$n = 100$ et $p = 0,06$
d'où $\mathrm{E}(X) = 6$ et $\sigma(X) = \sqrt{5,56}$.

Calculons alors $P(8 \leqslant X \leqslant 10)$.

- Avec la loi binomiale
  $P(8 \leqslant X \leqslant 10) \simeq 0,2140$

- Avec la loi normale
  $P(7.5 \leqslant X \leqslant 10.5) \simeq 0,2342$
  L'erreur est alors de 2%

Exemple : On lance 180 fois un dé à jouer et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. En utilisant l'approximation normale calculer au millième les probabilités suivantes :

a) $P(X \leqslant 20)$ b) $P(X > 40)$ c) $P(X \leqslant 20 \text{ ou } X > 40)$

Il faut d'abord calculer les paramètres de la loi normale correspondante à cette loi binomiale $\mathscr{B}(180, 1/6)$

$$\mathrm{E}(X) = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$$

Il faut vérifier qu'on se trouve dans les hypothèses de l'approximation :
$np = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 150 \geqslant 5$

A l'aide d'une calculatrice, on trouve alors :

a) $P(X \leqslant 20) = P_N(X \leqslant 20,5) =$ NormalFRép(-1 E 99,20.5, 30,5) $\simeq 0,029$

b) $P(X > 40) = P_N(X \geqslant 40,5) =$ NormalFRép(40.5,1 E 99, 30,5) $\simeq 0,018$

c) $P(X \leqslant 20 \text{ ou } X > 40) = P_N(X \leqslant 20.5) + P_N(X > 40,5) \simeq 0,047$

Si on utilise une table, il faut changer de variable : $Z = \dfrac{X - 30}{5}$.

a) $P(X \leqslant 20) = P_N(X \leqslant 20,5) = P_N\left(Z \leqslant \dfrac{20,5 - 30}{5}\right)$

$P(X \leqslant 20) = P_N(Z \leqslant -1,9) = \Phi(-1,9) = 1 - \Phi(1.9) \simeq 0,029$

b) $P(X > 40) = P_N(X \geqslant 40,5) = P(Z \geqslant 2,1) \simeq 0,018$

2.3.4 Théorème Central-Limit (hors programme)

Théorème 8 : Lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires de loi quelconque, cette somme suit une loi normale.

Remarque : Un grand nombre de distributions dans la nature suivent une loi normale car ces distributions décrivent des phénomènes qui résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes comme la taille d'un individu.