I Suites géométriques

1 Définition

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Évolution en pourcentage

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = C_n \times \left(1+\frac{1}{100}\right) = 1{,}01 \times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}01$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = r_n \times \left(1-\frac{4}{100}\right) = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 Propriété 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0{,}96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 Propriété 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

4 Monotonie

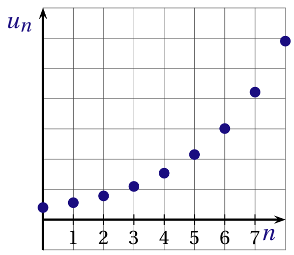
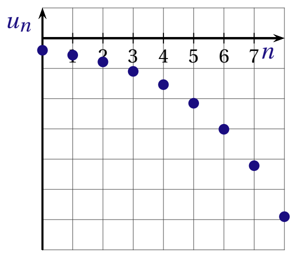
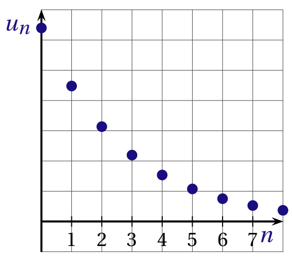
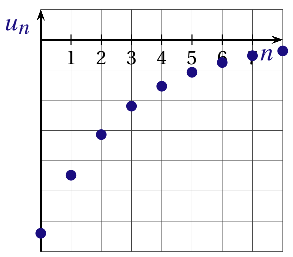
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

— Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite $\left(q^n\right)$.

— Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite $\left(q^n\right)$.

5 Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

II Limite d'une suite

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 Limite infinie

Définition

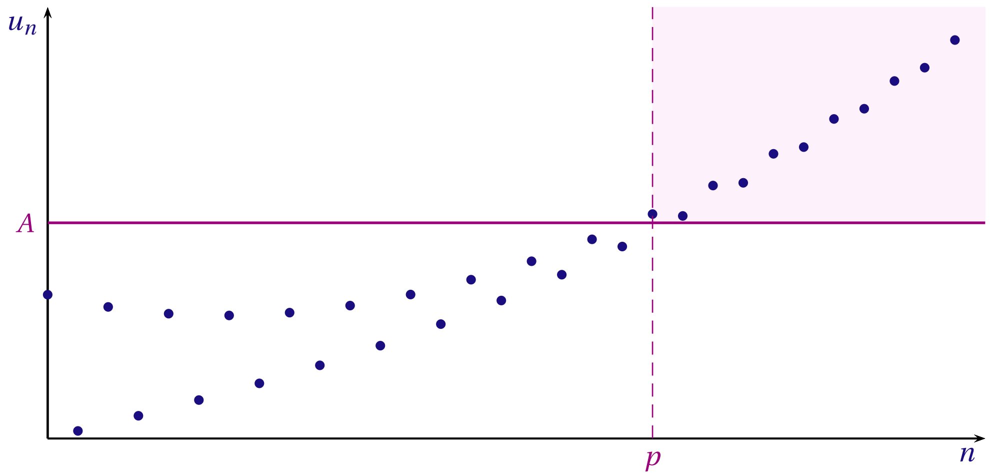
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

Interprétation graphique

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Soit p un entier tel que pour tout entier $n \geqslant p$, on a $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2 Limite finie

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r ; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. On écrit :

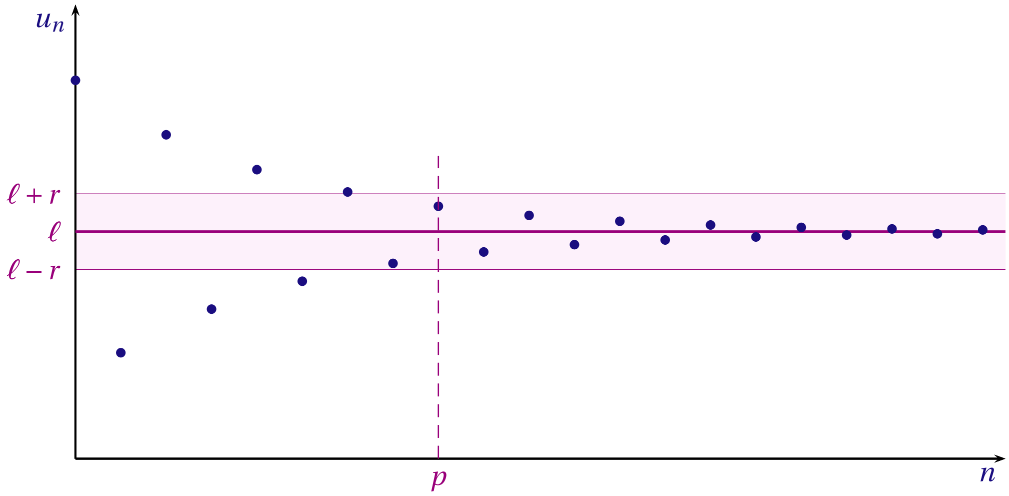
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 Limites d'une suite géométrique

THÉORÈME (*admis*)

Soit q un nombre réel :

— Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

— Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

REMARQUE

Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente.
Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n, elle n'admet pas de limite.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q **strictement positive**.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.

— Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

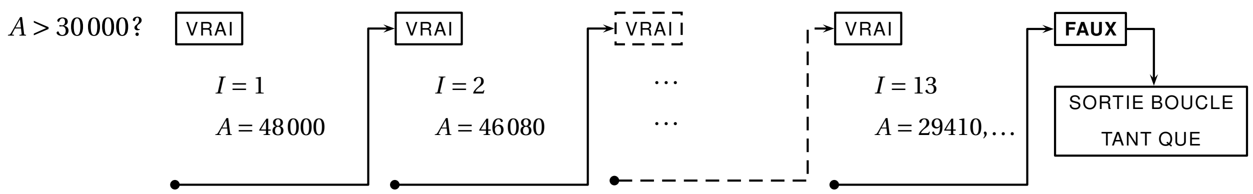
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50\,000$
Comme $0 < 0{,}96 < 1$ la suite (r_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} 50\,000 \times 0{,}96^n = 0$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier I tel que pour tout entier $n \geqslant I$, $50\,000 \times 0{,}96^n < 30\,000$

$A \leftarrow 50\,000$
$I \leftarrow 0$
Tant que $A \geqslant 30\,000$
    $I \leftarrow I+1$
    $A \leftarrow 0{,}96 \times A$
Fin Tant que

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 50000 → A	50000 → A ↲
: 0 → I	0 → I ↲
: While A ≥ 30000	While A ≥ 30000 ↲
: I + 1 → I	I + 1 → I ↲
: 0.96*A → A	0.96*A → A ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp I	I

Initialisation des variables A et I : $A = 50\,000$ et $I = 0$.
Traitement : Tant que la condition $A \geqslant 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "TANT QUE" et "FIN TANT QUE"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2\,000$
$1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,000 \times 1{,}015^n = +\infty$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $2\,000 \times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$

```
A ← 2000
N ← 0
Tant que A < 3000
    A ← 1,015 × A
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 28.
Donc pour tout entier $n \geqslant 28$, $u_n \geqslant 3000$. Soit pour tout entier $n \geqslant 28$, $2000 \times 1{,}015^n \geqslant 3000$.

III Suites arithmético-géométriques

1 Définition

Soient a et b deux réels.
La suite (u_n) définie pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite *arithmético-géométrique*

REMARQUE

— Si $a = 1$ la suite est arithmétique.

— Si $b = 0$ la suite est géométrique.

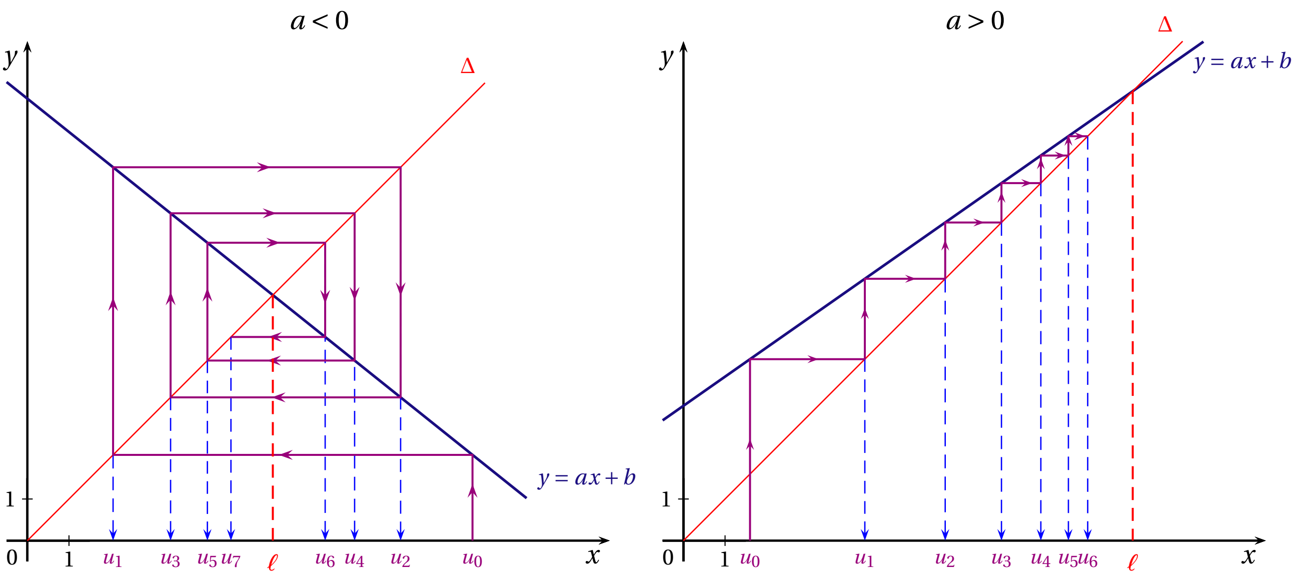
— Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 Étudier une suite arithmético-géométrique

a et b sont deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
(u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier n, $u_{n+1} = au_n + b$.

Représentation graphique

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

Une suite auxiliaire

PROPOSITION

Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier n, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

✻ PREUVE

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= au_n - a\ell \\ &= a \times (u_n - \ell) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n, $v_{n+1} = a \times v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

CONSÉQUENCE

(v_n) est une suite géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier n, $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.
Comme $v_n = u_n - \ell \Leftrightarrow u_n = v_n + \ell$, on en déduit que : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).}$

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$.

2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1\,000 + 125\,000 = 126\,000$.

3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
   (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126\,000 \times 1{,}002^n$.
   Donc pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000$.

4. *Étude de la suite (u_n).*
   a) *Variation*
   Pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$

   D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) *Limite*

Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000 = +\infty$.

c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*

On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15\,000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```
U ← 1000
N ← 0
Tant que U ⩽ 15000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.

Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n$.

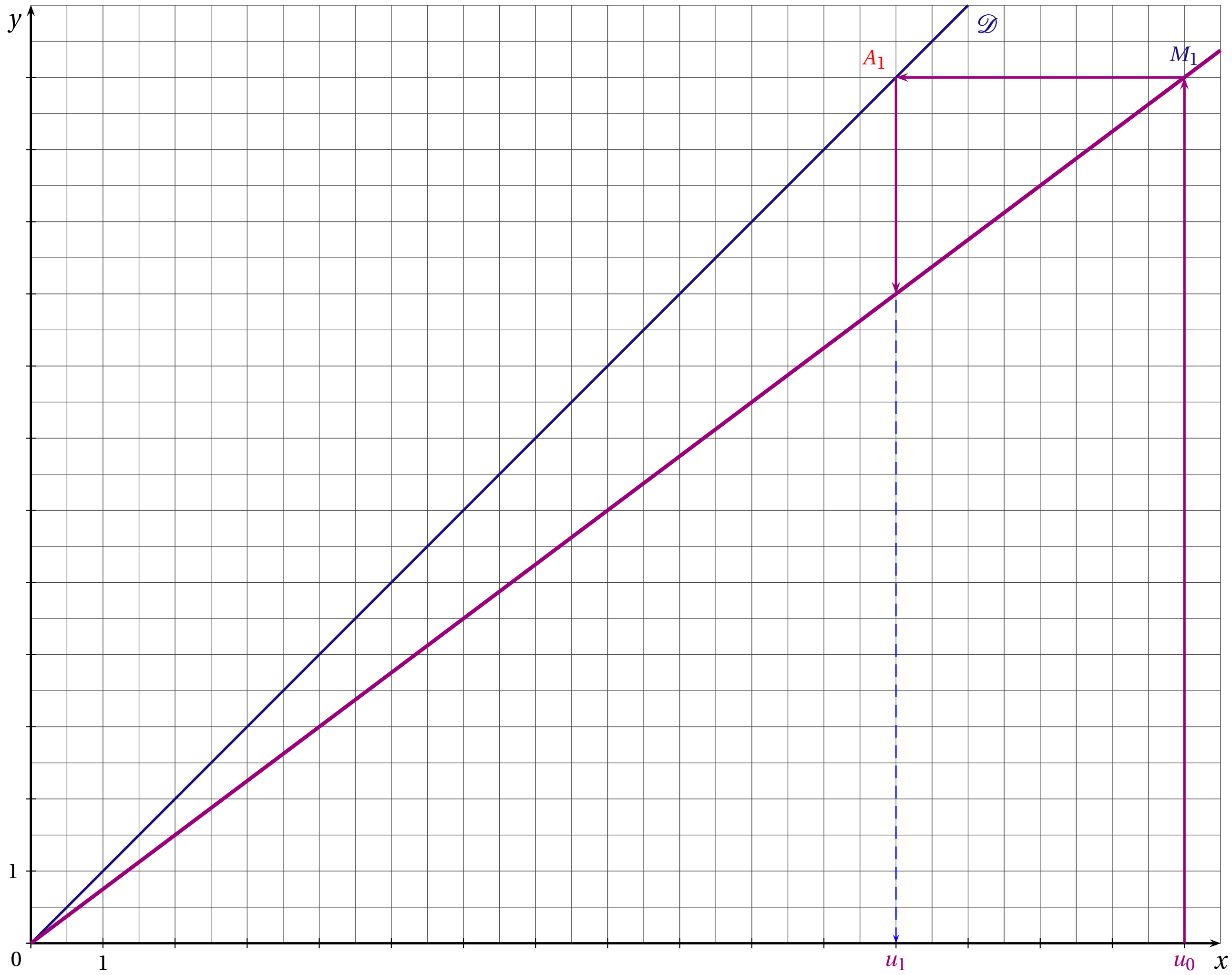
PARTIE A

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



   a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{10}$.

   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 16
Tant que U > 0,01
    U ← 0,75 × U
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   Que représente pour la suite (u_n) la valeur finale de la variable N calculée par cet algorithme ?

PARTIE B

On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

1. Calculer S_4.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la valeur de la somme S_n pour un entier donné.

```
U ← ...
S ← ...
Pour I allant de 1 à N
    U ← ...
    S ← ...
Fin Pour
```

3. a) Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$.
   b) Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.
On estime que chaque année 85 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et que 12 mille nouvelles personnes souscriront un abonnement.
En 2015, il y avait 40 mille abonnés à cette revue.
On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2015 + n$; on a donc $a_0 = 40$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
A ← 40
Tant que A ⩽ S
    A ← 0,85 × A + 12
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   Pour la valeur de la variable $S = 70$, la valeur finale de la variable N est $N = 9$. Interpréter ce résultat.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$.
   c) Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires ?

EXERCICE 3

(*D'après sujet bac Liban 2017*)

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2.
En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
   Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

PARTIE B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}98 \times u_n + 0{,}2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 31 \times (0{,}98)^n + 10$.
4. a) Calculer la limite de la suite (u_n).
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.
   a) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme :

```
1  U ← 41
2  n ← 0
3  Tant que ...
4      U ← ...
5      n ← n + 1
6  Fin Tant que
```

   b) La valeur de n calculée à la fin de l'algorithme est 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4

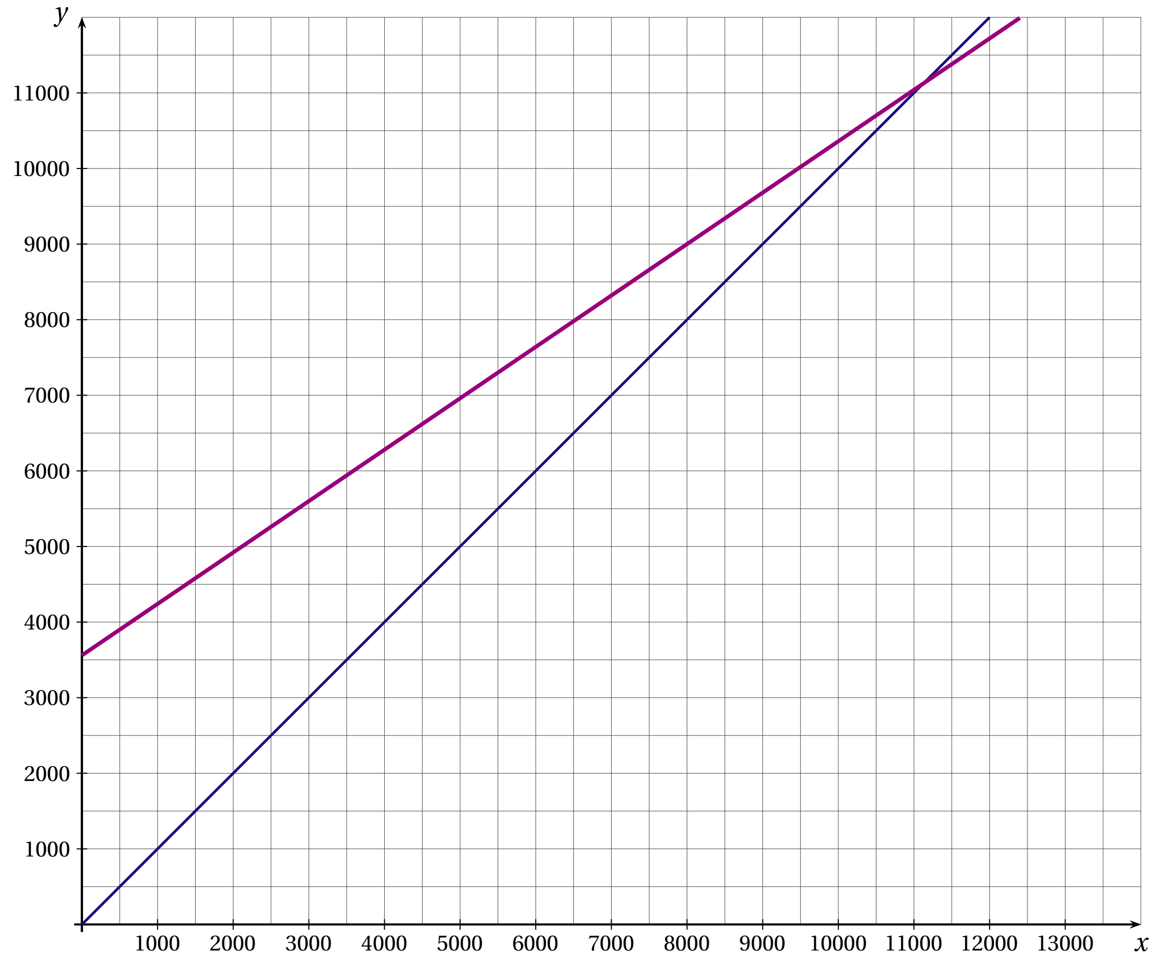
En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit ce bassin avec 90 m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.
On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n + 2{,}4$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0{,}97^n$.
2. Étudier la monotonie de la suite u_n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5500$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}68 \times u_n + 3560$.

1. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}68x + 3560$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).



Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que la limite de la suite (u_n).

b) Donner une interprétation de la valeur finale de la variable k calculée par l'algorithme suivant :

```
A ← 5500
k ← 0
Tant que A < 11000
    k ← k + 1
    A ← 0,68 × A + 3560
Fin Tant que
```

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 11125$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 11125 - 5625 \times 0{,}68^n$.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

PARTIE B

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.
Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 32% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3 560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
En 2015, il y avait 5 500 abonnés à cette revue.

1. Donner une estimation du nombre d'abonnés à cette revue en 2017.
2. Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue l'année $2015+n$.
   Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. a) Selon ce modèle, est-il possible d'envisager une diffusion supérieure à 12 000 abonnés ?
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés à la revue sera supérieur à 11 000.

EXERCICE 6

En 2015, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.
On note u_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année $2016+n$; on a donc $u_0=40$.

1. Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2016 ?
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}92\times u_n+4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 40
Tant que U ⩽ 44
    N ← N + 1
    U ← 0,92 × U + 4
Fin Tant que
```

   Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près.

N	0	1	...	
U	40		...	
Test $U \leqslant 44$	Vrai		...	

   Quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter ce résultat.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-50$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=50-10\times 0{,}92^n$.
5. Étudier la monotonie de la suite u_n.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=15$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}04u_n-0{,}5$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-12{,}5$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n=2{,}5\times 1{,}04^n+12{,}5$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Le 1er janvier 2014, la population d'une ville comptait 15 milliers d'habitants.
Les études démographiques sur les dernières années ont permis d'établir que la population de cette ville à partir du 1er janvier 2014 peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville le 1er de l'année $2014+n$.
Une réorganisation des transports en commun sera nécessaire dès que la population dépassera 16 000 habitants.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 15
N ← 0
Tant que U < 16
    U ← 1,04 × U − 0,5
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

1. Déterminer la valeur finale de N calculée par cet algorithme.
2. Interpréter le résultat précédent.

EXERCICE 8

Le 1er janvier 2014, la médiathèque d'une commune disposait d'un stock de 40 000 ouvrages.
Chaque année, le gestionnaire supprime 8 % des ouvrages, trop usagés ou abîmés, et achète 6 000 ouvrages neufs.
On s'intéresse à l'évolution du nombre de milliers d'ouvrages disponibles au 1er janvier de chaque année.
La situation est modélisée par une suite (u_n) où le terme u_n est le nombre, **en milliers**, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2014+n)$.

1. Calculer le nombre d'ouvrages disponibles au 1er janvier 2016.
2. Donner une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Des travaux de réaménagement des locaux seront nécessaires dès que le stock dépassera 50 000 ouvrages.
   On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 40
Tant que U ⩽ 50
    U ← 0,92 × U + 6
    N ← N + 1
Fin Tant que
N ← N + 2014
```

   a) Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près.

N	0	1	…	
U	40		…	
Condition $U \leqslant 50$	Vraie		…	

   b) Quelle est la valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter ce résultat.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 75$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 75 - 35 \times 0{,}92^n$.

5. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 9

Usines, bureaux, commerces, hôtels, etc. : les établissements constituent le tissu productif d'un territoire.
En France, entre les 1er janvier 2008 et 2013, le nombre d'établissements est passé de 3,5 millions à 4,2 millions dans les activités marchandes hors agriculture.
Cette croissance s'accompagne d'un important renouvellement des établissements sous forme d'entrées et de sorties du tissu productif.

MODÉLISATION

On estime que chaque année, sur la période entre les 1er janvier 2008 et 2013 :

— le taux de sortie annuel moyen des établissements par le biais de cessations d'activités et transferts géographiques (déménagements) est de 17,5 % ;

— le nombre d'entrées annuel par le biais de créations d'entreprises, de reprises ou de transferts (emménagements) est de 812 000 établissements.

L'évolution nombre d'établissements est modélisée par la suite (u_n) où le terme u_n est le nombre, **en millions**, d'établissements le 1er janvier de l'année $(2008 + n)$. Ainsi, $u_0 = 3{,}5$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}825 \times u_n + 0{,}812$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4{,}64$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4{,}64 - 1{,}14 \times 0{,}825^n$.
3. Ce modèle permet-il d'obtenir une estimation fiable (approchée à moins de 0,01 million près) du nombre d'établissements en France, au 1er janvier 2013 ?
4. En admettant que ce modèle reste valable pour les années suivantes :
   a) Est-il possible d'envisager qu'en France, le nombre d'établissements atteigne 5 millions ?
   b) On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'établissements sera supérieur à 4,5 millions.
   Parmi les trois algorithmes suivants, déterminer celui qui convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3{,}5$
Tant que $U \leqslant 4{,}5$
    $U \leftarrow 4{,}64 - 1{,}14 \times 0{,}825^n$
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
$n \leftarrow n + 2008$
	$n \leftarrow 0$
	$U \leftarrow 3{,}5$
	Tant que $U \leqslant 4{,}5$
	    $U \leftarrow 0{,}825 \times U + 0{,}812$
	    $n \leftarrow n+1$
	Fin Tant que
	$n \leftarrow n + 2008$
		$n \leftarrow 0$
		$U \leftarrow 3{,}5$
		Tant que $U > 4{,}5$
		    $U \leftarrow 0{,}825 \times U + 0{,}812$
		    $n \leftarrow n+1$
		Fin Tant que
		$n \leftarrow n + 2008$

EXERCICE 10

Une commune met en place un nouveau service internet par abonnement. L'abonnement d'une durée de un an est renouvelable à la fin de chaque année.
On suppose que l'effectif de la population concernée par ce service n'évolue pas et est égal à 50 000.
On estime que chaque année, 79% des abonnés renouvelleront leur abonnement en fin d'année et que 4% des non abonnés d'une année s'abonneront l'année suivante.
La première année 400 personnes se sont abonnées à ce service.

1. On note a_0 le nombre d'abonnés à ce service la première année, a_1 le nombre d'abonnés un an plus tard etc.

   Calculer a_1 et a_2.
2. L'évolution du nombre d'abonnés à ce service est modélisée pour tout entier n par la suite (a_n) où le terme a_n est le nombre d'abonnés n années après la première année de la mise en place de ce service. On a donc $a_0 = 400$.

   Justifier que pour tout entier n , $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 2000$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
A ← 400
Tant que A < 5 000
    N ← N + 1
    A ← 0,75 × A + 2 000
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	...	
Valeur de A	400		...	
Condition $A < 5000$	Vraie		...	

   b) Donner la valeur finale de la variable N calculée par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 8000$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 8000 - 7600 \times 0{,}75^n$.
5. a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   b) Calculer la limite de la suite (a_n) et interpréter ce résultat.
6. Le montant annuel d'un abonnement est de 30 €. On note S_n la somme totale perçue par le gestionnaire sur l'ensemble des n premières années après la mise en place de ce nouveau service.

   Calculer le montant arrondi à la dizaine d'euros près de la somme perçue par le gestionnaire sur l'ensemble des cinq premières années.

EXERCICE 11 (*D'après sujet bac Amérique du Nord 2017*)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

— 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;

— les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.
3. Recopier et compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme suivant afin qu'il calcule le nombre d'années à partir duquel le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
L1    n ← 0
L2    U ← 27500
L3    Tant que U ⩽ ...
L4        n ← ...
L5        U ← ...
L6    Fin Tant que
```

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   b) Donner la valeur de n calculée par cet algorithme.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 12 (*D'après sujet bac Polynésie 2017*)

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}996 \times u_n + 7{,}2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015 + n$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

```
N ← 2015
U ← 4000
.................................
    ............................
    ............................
.................................
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1800$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2200 \times 0{,}996^n + 1800$.
   c) Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître? Justifier la réponse.

4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 millions d'arbres en 10 ans.

   En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.

   On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.

   L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ?

   Justifier la réponse.