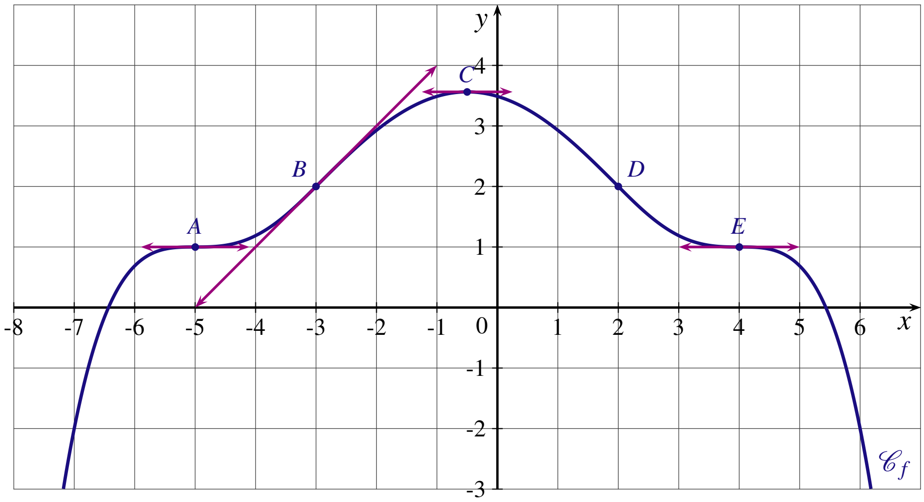
EXERCICE 1

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
— L'abscisse du point C est égale à $(-0{,}5)$.
— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B(-3;2)$ passe par le point de coordonnées $(-5;0)$.
— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D a pour équation $y=-x+4$.

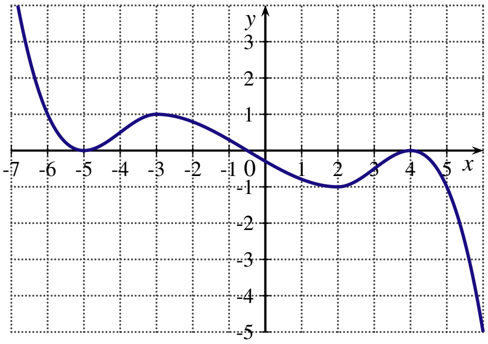


On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

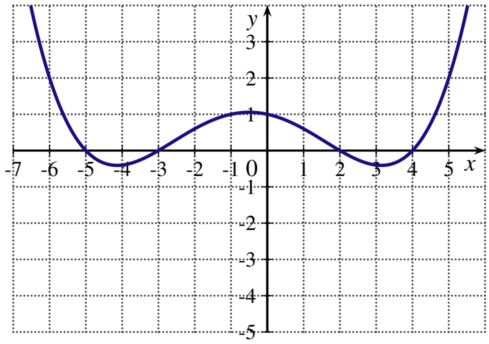
1. a) Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D.
   b) Déterminer $f'(2)$.

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées à partir d'arguments graphiques.

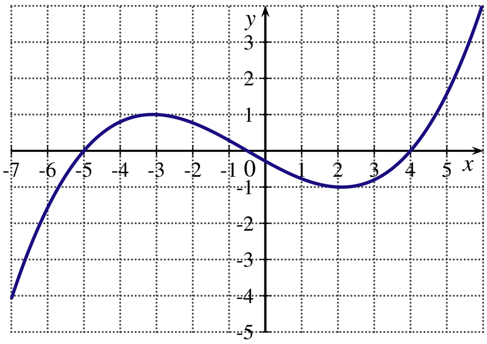
2. Déterminer $f'(-3)$ et $f'(4)$.
3. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leqslant$, $=$ ou $\geqslant$ est approprié :
   $f'(-5)\cdots 0$ $\quad$ $f'(-7)\cdots f'(6)$ $\quad$ $f''(-1)\cdots f''(3)$ $\quad$ $f''(2)\cdots 0$
4. Quels sont les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?
5. Une des quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.
   Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.



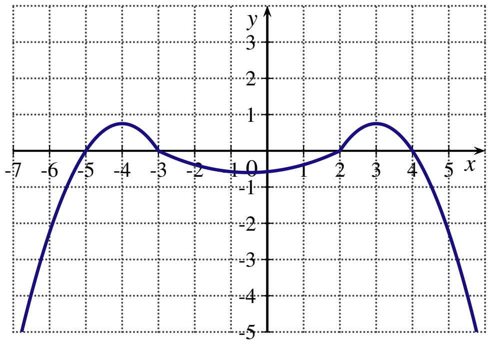
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



Courbe $\mathscr{C}_4$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie et dérivable pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 3}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x^4 + 9x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;2]$.
   b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α.

PARTIE B

On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = \dfrac{-6x\left(x^2-9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$.

1. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?

EXERCICE 3

Une entreprise vend trois articles notés A_1, A_2 et A_3. La fabrication de chacun de ces articles nécessite trois ressources X, Y et Z (*par exemple travail, matières premières et énergie*).
Le tableau suivant présente les coûts des ressources en euros, nécessaires à la fabrication de chaque article.

	X	Y	Z
A_1	15	10	3
A_2	12	8	5
A_3	8	9	5

1. a) Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 \\ 12 & 8 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat.
   b) À l'aide d'un produit de matrices, calculer le coût total de production pour la fabrication de 100 articles de chaque sorte.
2. La matrice des commandes de deux clients notés C_1 et C_2 est $C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 20 & 12 & 18 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux articles.
   a) Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \times C$ et interpréter le résultat.
   b) Le prix de vente unitaire de chacun des trois articles est respectivement 45 €, 50 € et 35 €.
   Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

EXERCICE 4

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Soit A et B deux matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ x-1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2x & x-1 \end{pmatrix}$ où x est un réel fixé.
   a) AFFIRMATION 1 : $A \times B = \begin{pmatrix} x^2+8x & 10x \\ x^2-x & 5x-1 \end{pmatrix}$.
   b) AFFIRMATION 2 : Il existe une unique valeur x pour laquelle $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Soit f une fonction deux fois dérivable telle que pour tout x réel, $f''(x) = 3x+2$, $f'(3) = 2$ et $f(3) = 5$.
   a) AFFIRMATION 3 : La fonction est convexe sur $\left[-\dfrac{2}{3};3\right]$.
   b) AFFIRMATION 4 : L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est : $y = 2x+5$.